Método de Eliminação de Fourier-Motzkin

André Rodrigues Monticeli ,
Centro Federal de Educação Tecnológica
CEFET - MG
37.010-590, Varginha, MG.
andre@varginha.cefetmg.br

Cristiano Torezzan
Faculdade de Ciências Aplicadas
FCA - UNICAMP
13.484-350, Limeira, SP.
cristiano.torezzan@fca.unicamp.br

Resumo: *Neste trabalho abordamos o problema de reduzir um sistema de inequações lineares através da eliminação de variáveis, o que possibilita projetar sua região de solução num espaço de dimensão menor. Mostramos como isso pode ser feito utilizando o método de eliminação de Fourier-Motzkin. Uma versão matricial desse método é apresentada a fim de facilitar sua implementação computacional e alguns exemplos são mostrados, incluindo uma projeção do hipercubo do $\mathbb{R}^4$ apoiado em um de seus vértices.*

Palavras-chave: *sistemas de inequações lineares, eliminação de Fourier-Motzkin*

1 Introdução

Um sistema de inequações lineares é um conjunto de inequações lineares nas mesmas variáveis:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}\right. . \tag{1}$$

onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são as variáveis, $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ são os coeficientes lineares do sistema de inequações e $b_1, b_2, ..., b_m$ são os termos constantes.

Fazendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

podemos escrevê-lo na forma matricial,

$$Ax < b \quad ou \quad Ax \leq b$$

onde a matriz $A_{m\times n}$ é denominada matriz dos coeficientes, x é denominado vetor das variáveis, e b é denominado vetor dos termos independentes.

A região de solução de um sistema de inequações lineares é chamado de poliedro. Quando esta região for limitada, dizemos que o poliedro é um politopo [3].

Neste trabalho, iremos apresentar um algoritmo matemático para eliminar variáveis de um sistema de inequações lineares, chamado método de eliminação de Fourier-Motzkin, com base nas ideias que desenvolvemos em [4]. Esse algoritmo nos permite reduzir um sistema do $\mathbb{R}^n$ até o $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}$ e projetar sua região de solução. O algoritmo consiste em criar um outro sistema do mesmo tipo de tal forma que ambos os sistemas tenham as mesmas soluções sobre as demais variáveis. Com esse algoritmo também poderemos decidir se o sistema original tem ou não soluções. Para isso basta eliminar todas as variáveis, obtendo um sistema de desigualdades constantes.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2 apresentamos de maneira formal o método de eliminação de Fourier-Motzkin. No final desta seção apresentamos alguns resultados que nos permitem decidir se o sistema de inequações tem ou não soluções e se esta região é limitada, utilizando o método de eliminação de Fourier-Motzkin. Estes resultados poderão ser encontrados em [2]. Na seção 3 trabalhamos o método por meio de operações com matrizes, o que facilitará sua abordagem computacional. E, para finalizar, na seção 4 aplicamos o método em um problema do $\mathbb{R}^3$. Utilizando as operações com matrizes, projetamos a região de solução no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}$.

2 Método de eliminação de Fourier-Motzkin

Nesta seção vamos apresentar o método de eliminação de Fourier-Motzkin seguindo as ideias vistas em [4].

Seja o sistema de inequações lineares $Ax \leq b$, representado na forma (1).

Para cada i, onde $a_{i1} \neq 0$, podemos multiplicar cada uma das inequações por $\dfrac{1}{|a_{i1}|}$, deixando como valor do coeficiente de x_1, 0 ou ± 1.

Temos, então

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} -x_1 & + & a'_{i2}x_2 & + & ... & + & a'_{in}x_n & \leq & b'_i \quad (i \in I^-) \\ x_1 & + & a'_{i2}x_2 & + & ... & + & a'_{in}x_n & \leq & b'_i \quad (i \in I^+) \\ & + & a'_{i2}x_2 & + & ... & + & a'_{in}x_n & \leq & b'_i \quad (i \in I^0) \end{array}\right. . \tag{2}$$

Onde $I^- = (i : a_{i1} < 0)$, ou seja, as inequações onde os coeficientes de x_1 são negativos, $I^+ = (i : a_{i1} > 0)$, ou seja, as inequações onde os coeficientes de x_1 são positivos e $I^0 = (i : a_{i1} = 0)$, ou seja, as inequações onde os coeficientes de x_1 são nulos, $a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{|a_{i1}|}$ e $b'_i = \dfrac{b_i}{|a_{i1}|}$.

Assim, o conjunto de índices da linha $I = \{1, 2, ..., m\}$ é particionado nos subconjuntos I^-, I^+ e I^0, sendo que algum destes pode ser vazio. Daqui resulta que $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é uma solução do sistema original (1) se, e somente se, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ satisfazem as seguintes restrições:

$$\max\{(a'_{k2}x_2 + ... + a'_{kn}x_n) - b'_k\} \quad \leq \quad x_1 \quad \leq \quad \min\{b'_i - (a'_{i2}x_2 + ... + a'_{in}x_n)\} \tag{3}$$

onde $i \in I^+, k \in I^-$ e

$$a'_{i2}x_2 + a'_{i3}x_3 + ... + a'_{in}x_n \quad \leq \quad b'_i \tag{4}$$

para o coeficiente de x_1 valendo zero, com $i \in I^0$.

A inequação (3) diz que x_1 encontra-se em um certo intervalo, que é determinado por $x_2, x_3, ..., x_n$. Por essa inequação podemos escrever:

$$\max\{(a'_{k2}x_2 + ... + a'_{kn}x_n) - b'_k\} \quad \leq \quad \min\{b'_i - (a'_{i2}x_2 + ... + a'_{in}x_n)\}, \tag{5}$$

que podemos resolver combinando cada inequação do primeiro conjunto de restrições com cada inequação do segundo conjunto de restrições.

Juntando os resultados obtidos resolvendo (5) com (4), obtemos uma projeção P no espaço das variáveis $x_2, x_3, ..., x_n$.

Pode-se então proceder da mesma forma e eliminar x_2, x_3, etc.

Observações [2]:

- Se I^- ou I^+ for vazio, o primeiro conjunto de restrições de (3) desaparece e o sistema será inconsistente ou terá uma região ilimitada, pois a variável x_1 não terá limite superior ($I^- = \oslash$) ou não terá limite inferior ($I^+ = \oslash$).

- Se o conjunto I^0 for vazio e apenas um dos conjuntos I^- ou I^+ for não vazio, não podemos eliminar a primeira variável. Uma alternativa é reordenar o sistema e iniciar a eliminação por outra variável.

- O método de eliminação de Fourier-Motzkin nos permite concluir se o sistema é inconsistente ou não. Para isto, basta eliminar todas as variáveis do sistema formando um sistema de desigualdades constantes.

Um problema desse método é que o número de restrições pode crescer exponencialmente mais rápido do que as variáveis são eliminadas, o que pode tornar cara sua aplicação em sistemas grandes.

Mais detalhes sobre esse método e sobre as observações poderão ser vistas em [4].

Na próxima seção vamos apresentar uma versão matricial do método de Fourier-Motzkin com o intuito de facilitar sua abordagem computacional.

3 Eliminação de Fourier-Motzkin através de operações com matrizes

Podemos utilizar a notação matricial para apresentar o método de Fourier-Motzkin de outro ponto de vista [2]. A seguir descrevemos, de forma resumida, esta abordagem.

Considere o sistema linear (1) e sua matriz de coeficientes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Seja A' a matriz dos coeficientes de um novo sistema linear (2), ainda com todas as variáveis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, mas cujos coeficientes de x_1 são ± 1 ou 0. O novo sistema de inequações lineares pode ser representado por

$$A'x \leq b'.$$

Vamos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & ... & a'_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}.$$

Vamos criar uma matriz positiva $C \in R^{m' \times m}$, onde $m' = |I^+| \times |I^-| + |I^0|$, ou seja, o número de linhas da matriz C é o produto entre o número de coeficientes $a'_{i1} > 0$ e $a'_{i1} < 0$ mais o número de coeficientes $a'_{i1} = 0$, e o número de colunas é igual ao número de linhas da matriz A'.

A matriz C será uma matriz binária (seus elementos serão 0 ou 1) de forma a representar as combinações entre o conjunto das inequações que satisfazem $a'_{i1} < 0$ com aquelas que satisfazem $a'_{i1} > 0$. Vamos supor que as linhas $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ são aquelas onde $a'_{i1} < 0$, as linhas $a'_{p+1}, a'_{p+1}, \ldots, a'_{p+r}$ são aquelas onde $a'_{i1} > 0$ e $a'_{p+r+1}, \cdots, a'_m$ as linhas que satisfazem $a'_{i1} = 0$. Neste caso a matriz C terá a forma:

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right].$$

Com a matriz C construída, agora para eliminarmos a primeira variável basta fazermos as seguintes operações com as matrizes:

$$C.A' \qquad e \qquad C.b'.$$

Assim, construímos a seguinte desigualdade:

$$\begin{bmatrix} 0 & a''_{12} & ... & a''_{1n} \\ 0 & a''_{22} & ... & a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & a''_{m'2} & ... & a''_{m'n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_{m'} \end{bmatrix}$$

onde a''_{ni} são os resultados da operação $C.A'$ e b''_n são os resultados da operação $C.b'$.
A variável x_1 pode ser eliminada deletando a primeira coluna da matriz $C.A'$.
Podemos então proceder da mesma forma e eliminar x_2, x_3, etc.
O processo ficará ilustrado e mais compreensível na aplicação apresentada a seguir.

4 Exemplos de aplicações do método de Fourier-Motzkin

Exemplo 1:

Consideremos o seguinte sistema de inequações lineares:

$$\left\{\begin{array}{ccc} z & \leq & 4 \\ -z & \leq & -2 \\ 4x+z & \leq & 10 \\ -4x-z & \leq & 0 \\ -2y+z & \leq & 0 \\ 2y-z & \leq & 4 \end{array}\right. . \tag{6}$$

Vamos eliminar a variável z, projetando no plano xy a região de solução de (6). Para isso, vamos rearranjá-lo da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{ccc} -z & \leq & -2 \\ -z-4x & \leq & 0 \\ -z+2y & \leq & 4 \\ z & \leq & 4 \\ z+4x & \leq & 10 \\ z-2y & \leq & 0 \end{array}\right. .$$

Agora, como os coeficientes de z já são ± 1, escreveremos as matrizes A e b, determinamos C e fazemos as operações indicadas na seção 3. Assim temos,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz C terá, 6 colunas e $(3 \times 3) + 0 = 9$ linhas. Logo, temos a matriz C e as operações com matrizes:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad C.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C.b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Desta forma eliminamos a variável z e obtemos o seguinte sistema com as variáveis x e y, cuja região está representada na Figura 1.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \leq & 2 \\ 4x & \leq & 8 \\ -2y & \leq & -2 \\ -4x & \leq & 4 \\ 0 & \leq & 10 \\ -4x-2y & \leq & 0 \\ 2y & \leq & 8 \\ 4x+2y & \leq & 14 \\ 0 & \leq & 4 \end{array} \right. . \tag{7}$$

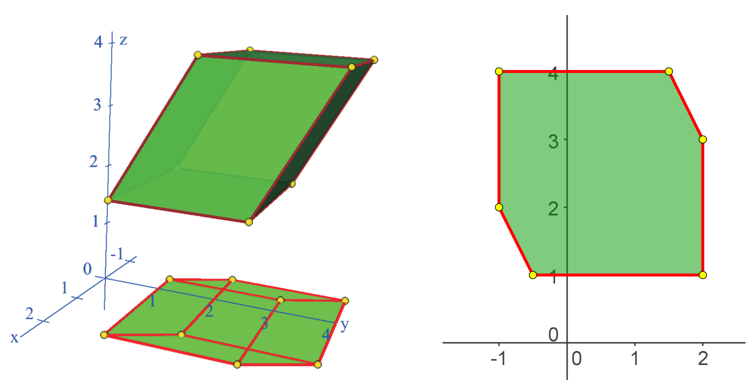

Figura 1: Projeção da região de solução de (6) no plano xy no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2:

Seja $C_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; |x_i| \leq 1\}$ o hipercubo de dimensão quatro centrado na origem de aresta igual a dois. Este poliedro é definido pelo seguinte sistema de inequações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos utilizar o método de Fourier-Motzkin para obter uma projeção tri-dimensional deste hipercubo no subespaço ortogonal ao vértice (1,1,1,1). Para tanto, vamos efetuar uma rotação que leva o vértice $(1, 1, 1, 1)$ no vetor $(0, 0, 0, 2)$ e em seguida eliminar a variável x_4 do poliedro rotacionado.

O sistema que define o poliedro rotacionado é dado por:

$$\begin{bmatrix} 0.7071 & 0.4082 & 0.2887 & 0.5000 \\ -0.7071 & -0.4082 & -0.2887 & -0.5000 \\ -0.7071 & 0.4082 & 0.2887 & 0.5000 \\ 0.7071 & -0.4082 & -0.2887 & -0.5000 \\ 0 & -0.8165 & 0.2887 & 0.5000 \\ 0 & 0.8165 & -0.2887 & -0.5000 \\ 0 & 0 & -0.8660 & 0.5000 \\ 0 & 0 & 0.8660 & -0.5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Após a eliminação da variável x_4, utilizando o método de Fourier-Motzkin obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} -1.4142 & -2.4495 & 0 \\ -1.4142 & -0.8165 & -2.3094 \\ -2.8284 & 0 & 0 \\ -1.4142 & 0.8165 & 2.3094 \\ -1.4142 & 2.4495 & 0 \\ 0 & -1.6330 & 2.3094 \\ 0 & 1.6330 & -2.3094 \\ 1.4142 & -2.4495 & 0 \\ 1.4142 & -0.8165 & -2.3094 \\ 2.8284 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 0.8165 & 2.3094 \\ 1.4142 & 2.4495 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

cujo poliedro correspondente está representado na Figura 2.

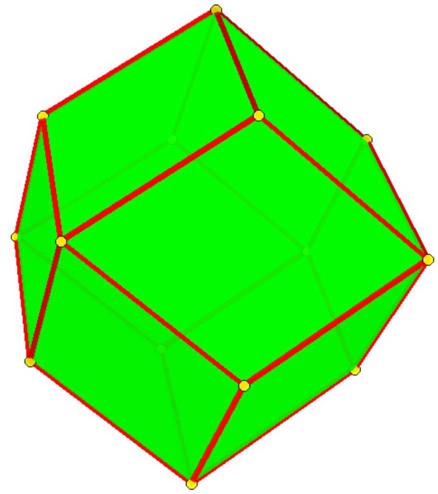

Figura 2: Projeção do hipercubo do $\mathbb{R}^4$ no subespaço ortogonal ao vetor $(1, 1, 1, 1)$.

5 Considerações finais

Neste trabalho estivemos interessados em reduzir um sistema de inequações lineares do $\mathbb{R}^n$ para o $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ ou até para o $\mathbb{R}$, para podermos projetar a região de solução. Mostramos como podemos fazer essa redução, utilizando o método de eliminação de Fourier-Motzkin. Também apresentamos uma versão matricial desse método que facilita sua abordagem computacional, além de alguns exemplos.

Referências

[1] Berkovitz, L. D. "*Convexity and optimization in Rn. Pure and Applied Mathematics*", (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[2] Dahl, G. "*Combinatorial properties of Fourier-Motzkin elimination.*" Electron. J. Linear Algebra 16 (2007), 334-346 (electronic).

[3] Lauritzen, N. "*Lectures on convex sets.*" Notas de aula, Aarhus University: http://home.imf.au.dk/niels/lecconset.pdf, Março 2009.

[4] Monticeli, André R., "*Um estudo sobre sistemas de inequações lineares*", Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, 2010.